DOI:10.21134/s8m5gr27

CYTEF XII Congreso Ibérico y X Congreso Iberoamericano de Ciencias y Técnicas del Frio
Universidad Miguel Hernández de Elche
26-06 28-06/2024
UNIVERSITAS Miguel Hernández

METODO DE UNA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE UN PROBLEMA DE TRANSFERENCIA DE CALOR A TRAVÉS DE SERIES FINITAS, CON CONDICIONES PARA UN SISTEMA NO CONCENTRADO.

Rojas Cañas M. Z. [1]*, Castillo Castro F.[2] y Arroyo Cabañas F. G. [3]

1: Maestría en Ingeniería Energética, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, S. Lorenzo 290, Col del Valle Sur, Benito Juárez, 03104 Ciudad de México, CDMX.
e-mail: mariana.rojas.canas@gmail.com
2: Licenciatura en Ingeniería en Sistemas Energéticos, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Calle Prolongación San Isidro No. 151, Colonia San Lorenzo Tezonco, Alcaldía Iztapalapa, Ciudad de México.
e-mail: fernan.castillo6@gmail.com
3: Programa de Energía, Colegio de Ciencia y Tecnología, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, CDMX. Prol. San Isidro 151, San Lorenzo Tezonco, Iztapalapa, Ciudad de México, CDMX.
e-mail: fernando.arroyo@uacm.edu.mx

Resumen: *La solución a los problemas de transferencia de calor puede llevarse a cabo de diversas maneras. A lo largo del tiempo, la tecnología ha buscado formas de facilitar el proceso de encontrar soluciones cada vez más precisas. Uno de los métodos más útiles son los métodos numéricos, que permiten aproximaciones de alta precisión para resolver diferentes problemas, aunque es necesario tener un buen entendimiento de los mismos para generar respuestas totalmente exactas. El uso de series finitas es un método matemático que se ha implementado en métodos numéricos para llegar a soluciones más precisas en diferentes problemas de transferencia de calor.*

En este trabajo de investigación se ha desarrollado un modelo adaptable a diferentes problemas con geometrías distintas, empleando métodos numéricos para analizar aquellos problemas que no pueden resolverse mediante métodos analíticos. Se basa en el método de diferencias finitas para la resolución del problema, obteniendo una formulación numérica para la conducción de calor en una esfera, considerando los elementos finitos en la frontera y a nivel de cada partícula que compone la geometría.

Para formular y resolver numéricamente este problema de transferencia de calor, se plantearon ecuaciones de series finitas y se realizó un balance de energía para obtener las diferencias generales de todos los nodos interiores. El elemento, descrito por el nodo m y los dos nodos vecinos m-1 y m+1, representa la forma de la conducción de calor que se lleva a cabo en las superficies del elemento en cuestión.

Palabras clave: Métodos Numéricos, Transferencia de Calor, Diferencias Finitas, Balance de Energía, Sistemas Termodinámicos.

1. INTRODUCCIÓN

La transferencia de calor se produce mediante la diferencia de temperatura entre dos sistemas, siendo necesaria la existencia de un gradiente térmico en el medio. Esta transferencia se puede producir por conducción, convección o radiación. [1]. Un sistema concentrado tiene temperatura uniforme, mientras que un sistema no concentrado varía en función del tiempo y del ambiente. [2] Para calcular estas variaciones se utilizan modelos matemáticos basados en diferencias finitas, que aproximan las soluciones mediante ecuaciones algebraicas [3].

Para implementar este método se requiere un balance de energía que no involucre ecuaciones diferenciales y se utiliza la primera derivada en función de la razón del incremento y la posición de la variable independiente [4]. En esta investigación se ha desarrollado un programa informático que utiliza un método numérico para resolver problemas específicos de transferencia de calor en una geometría esférica, a través de un conjunto de ecuaciones algebraicas. [5].

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para la presente investigación, resulta fundamental comprender el método de diferencias finitas, ya que se trata de una aproximación de las derivadas parciales mediante expresiones algebraicas que involucran un número limitado de puntos de la variable dependiente [6]. En cuanto a la formulación numérica de un problema de conducción de calor, existen diversas técnicas, entre las que se encuentra el método explícito de diferencias finitas, el cual se empleó en el presente estudio. Para llevar a cabo la solución numérica de los problemas de transferencia de calor, se requiere expresar las ecuaciones en diferencias finitas, proceso que consiste en seguir una serie de pasos bien definidos.

Se reemplaza la derivada por diferencias finitas.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) \quad (1)$$

Donde es la expresión aproximada de la derivada en términos de diferencias. Posteriormente se aproxima.

$$f'(x) \cong \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

Después de este proceso, se hace un balance de energía, obteniendo una ecuación en diferencias generales para los nodos interiores, considerando el elemento representado por el nodo m y los dos nodos vecinos m-1 y m+1 [4].

Suponiendo que la conducción de calor se lleva a cabo en los elementos sobre todas las superficies, entonces, el balance de energía en el elemento se puede expresar como:

$$\mathrm{Q_{cond,izq}} + \mathrm{Q_{cond,der}} + \mathrm{E_{gen,elemento}} = 0 \quad (3)$$

Considerando que:

$$Q_{cond,izq} = kA\,\frac{Tm-1-Tm}{\Delta x} \quad (4)$$

$$\mathrm{Q_{cond,der}} = \mathrm{kA}\,\frac{\mathrm{Tm+1-Tm}}{\mathrm{\Delta x}} \quad (5)$$

$$\mathrm{E_{gen,elemento}} = \dot{e}mA\Delta x \quad (6)$$

Sustituyendo (4), (5) y (6) en (3) y simplificando:

$$\frac{\mathrm{Tm+1-2Tm+Tm-1}}{\mathrm{\Delta x2}} + \frac{\dot{\mathrm{e}}}{\mathrm{k}} = 0 \quad (7)$$

Donde la ecuación 4 es para una pared en estado estacionario con la conductividad térmica constante. Ahora, para la conducción de calor en régimen transitorio, primero se consideró una barra de longitud (L) que, inicialmente, se encuentra a una temperatura uniforme Ti, por lo tanto, se utiliza la siguiente ecuación. [4].

$$k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{8}$$

Usando condiciones de frontera y condiciones iniciales se tiene que:

$$T(0,t) = T_0$$

$$T(L,t) = T_L$$

$$T(x,0) = T_I$$

Por lo que, la ecuación de calor queda:

$$k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = \rho c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{9}$$

Para el problema que se plantea en el presente trabajo de investigación, la geometría analizada es una esfera, por lo que la ecuación 6 se transforma a coordenadas esféricas, considerando una longitud de radio (r), quedando de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \dot{q} = \rho c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \tag{10}$$

Donde, la primera derivada de la temperatura con respecto al tiempo $\frac{dT}{dt}$ es:

$$\frac{dT}{dt}\Big|_m^n \cong \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t} \tag{11}$$

Y la primera y segunda derivada de la temperatura con respecto a la posición se puede expresar como:

Primera derivada

$$\frac{dT}{dr}\Big|_m^n \cong \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta r}$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2T}{dr^2}\Big|_m^n \cong \frac{T_m^{n+1} - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{\Delta r^2}$$

Por lo tanto, la ecuación de calor en su forma esférica; para diferencias finitas queda expresada de la siguiente manera [7]:

$$T_{m+1}^n = rT_{m+1}^n + (1-2r)T_m^n + rT_{m-1}^n - \frac{f}{r_0}\left(T_{m+1}^n - T_{m-1}^n\right) + \frac{q\Delta t}{\rho c_p} \tag{13}$$

Donde:

$$r = \frac{k\Delta t}{\rho\, c_p \Delta r^2} \tag{14}$$

$$f = \frac{2k\Delta t}{\rho\, c_p \Delta r} \tag{15}$$

Entonces este método descrito anteriormente se utilizará para resolver un problema de transferencia de calor, el cual tendrá las siguientes condiciones de referencia. Se pensó en una geometría esférica con una cierta masa, que tiene una temperatura inicial (T_I) y que se va a enfriar uniformemente a una temperatura final (T_f), donde el calor generado (q) es igual a 0, es decir, q=0; y tiene una densidad promedio (ρ) de

0.95 g/cm3, en un tiempo de exposición t=2 h 45 min.

Y se pretende determinar la temperatura en cualquier punto de la esfera, en un intervalo de tiempo determinado, tomando en cuenta una constante de conductividad k=0.45 $\frac{W}{m°C}$, inicialmente a $T_1 = 15$ °C, hasta $T_f = -7$ °C y con un radio $r_0 = 0.5$m.

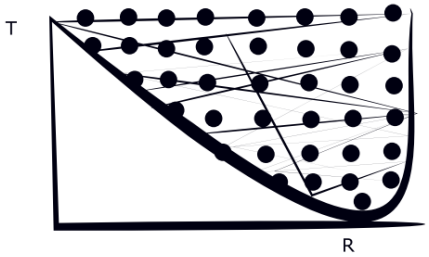

Figura 1. Grafico T vs R, en el cual se visualiza los nodos y el perfil de temperatura para un sistema no concentrado.

3. METODOLOGÍA

Para dar solución al problema planteado, se generó una programación en el software Matlab, utilizando la función guide para generar una aplicación(Figura 2) interactiva en la cual se puede obtener graficas del perfil de temperaturas en función de la posición (radio). La programación permite obtener gráficas del perfil de temperaturas (Figura 1) en función de la posición tomando en cuenta los valores que nos da el planteamiento, posterior se realiza el cálculo de las variables r y f donde, estas variables son a dimensionales y concluyen con el ciclo que llena una matriz.

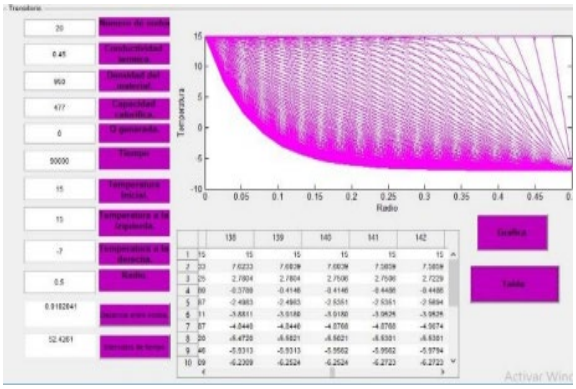

Figura 2. Aplicación generada en Matlab.

4. Resultados

Se presentan las Figura 3, Figura 4 y Figura 5 que muestran la temperatura en función del radio para un tiempo fijo y con diferentes cantidades de nodos en la malla (30, 50 y 100). A medida que se aumenta la cantidad de nodos, los cambios en la temperatura son menores. Se sugiere aumentar el radio, pero se observa que esto puede afectar la conducción de calor debido a la cantidad insuficiente de nodos en la figura esférica.

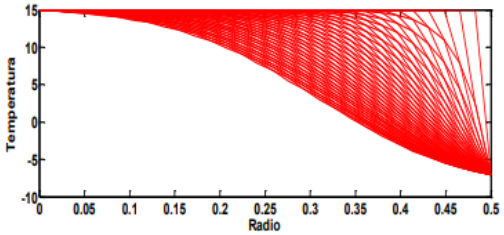

Figura 3. Gráfica Radio vs Temperatura, con 30 Nodos.

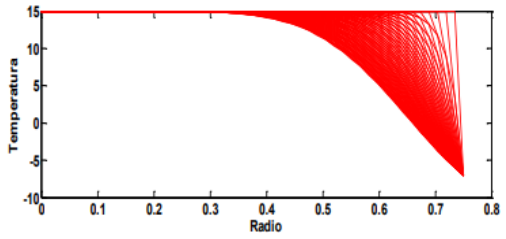

Figura 4. Gráfica Radio vs Temperatura con 50 Nodos.

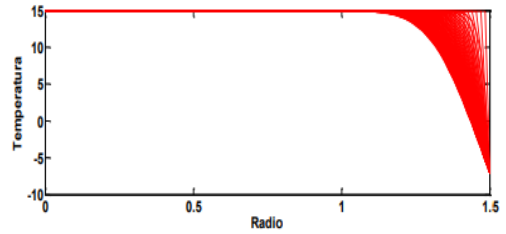

Figura 5. Gráfica Radio vs Temperatura con 100 Nodos.

En las Figura 6, Figura 7 y Figura 8 se muestran perfiles de temperatura contra la variación del radio utilizando distintos números de nodos (50, 85 y 20) y intervalos de tiempo (2,000, 99,000 y 100,000 segundos) para observar comportamientos a lo largo del tiempo. Se observó que para un intervalo de tiempo de 99,000 segundos y 50 nodos, la temperatura de la esfera es homogénea hacia el centro. Para un intervalo de tiempo de 2,000 segundos y 85 nodos, la transferencia de calor no cubría toda la geometría. Para un intervalo de tiempo de 100,000 segundos y 20 nodos, se cubría la geometría y la transferencia de calor era homogénea, permitiendo observar el comportamiento de la temperatura en cualquier punto.

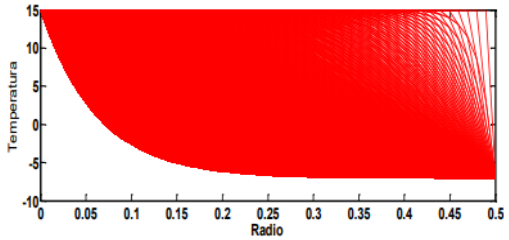

Figura 6. Grafica Tiempo vs Temperatura con 99,000 segundos.

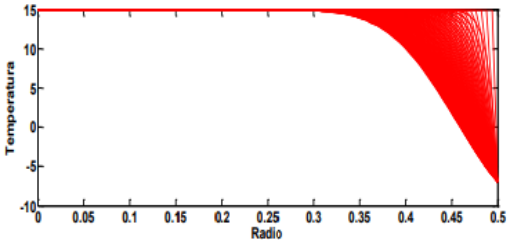

Figura 7. Grafica Tiempo vs Temperatura con 2,000 segundos.

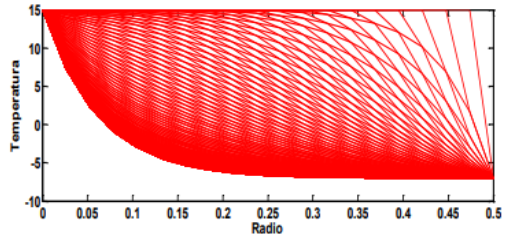

Figura 8. Grafica Tiempo vs Temperatura con 100,000 segundos.

5. CONCLUSIONES

El método de diferencias finitas representa una herramienta numérica eficaz para obtener aproximaciones de problemas específicos y detectar comportamientos en puntos determinados de una geometría particular. Sin embargo, se ha identificado la importancia de analizar cuidadosamente la cantidad de nodos a emplear, ya que un conjunto grande de estos puede dificultar la visualización de los cambios en los perfiles de temperatura. Adicionalmente, al modificar los radios de la geometría, se ha observado que incrementarlos para percibir cambios en la transferencia de calor no es efectivo, mientras que al reducirlos se aprecia adecuadamente el decremento de la temperatura. En consecuencia, se puede afirmar que el sistema es no concentrado.

6. REFERENCIAS

[1] Cengel, Yunus A. y Ghajar, Afshin J. Libro "Transferencia de Calor y Masa, Fundamentos y Aplicaciones", Cap. 1 "Introducción y Conceptos Básicos", pp. 17 y 18, 4ta Ed., Editorial: Mc Graw Hill.

[2] Cengel, Yunus A. y Ghajar, Afshin J. Libro "Transferencia de Calor y Masa, Fundamentos y Aplicaciones", Cap. 4 "Conducción de calor en régimen transitorio", pp. 225:228, 4ta Ed., Editorial: Mc Graw Hill.

[3] Alvis Armando, Caicedo Isaac y Peña Pierre, Artículo "Determinación del Coeficiente de Transferencia de Calor a Través de una Aplicación de Computadoras", pp. 13, [PDF], disponible es: file:///C:/Users/florp/Downloads/ContentServer.pdf.

[4] Cengel Yunus A. y Ghajar Afshin J., Libro "Transferencia de Calor y Masa, Fundamentos y Aplicaciones", Cap. 5 "Métodos Numéricos en la Conducción de Calor", pp. 296, 299-301, 4ta Ed., Editorial: Mc Graw Hill.

[5] Rodríguez Prieto Juan Manuel, "Transferencia de Calor". Cap. 5, Métodos numéricos en la conducción de calor, pp. 2-3. [PDF]. Disponible en: https://juanrodriguezprieto.files.wordpress.com/2014/02 /tc_cap5.pdf.

[6] Hernández García Guillermo, "El Método de Diferencias Finitas", Página de la UNAM de Geofísica, pp. 2, [PDF], disponible en: http://mmc2.geofisica.unam.mx/cursos/hidrogeologia/N otasCurso/1-MDF1_1-10.pdf.

[7] Manrique Valadez, José Ángel, "Transferencia de Calor", pp 79-101 [PDF]. Disponible en: file:///C:/Users/florp/OneDrive/Escritorio/Uacm/Manriq ue_Transferencia_de_Calor_2Eed.pdf.pdf.

[8] Haberman R., "Elementary Applied Partial Differential Equations", 2a Ed., New Jersey: Prentice Hall, 1987.